

Визначення функціональної залежності між надмірною вагою та мірою перенавантаження колінних суглобів у жінок з гоналгіями

УДК 615.8

І. О. Жарова¹, В. І. Скочко², О. В. Кучерява¹

¹Національний університет фізичного виховання і спорту України, Київ, Україна
²Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

Резюме. Стаття присвячена виявленню функціональної залежності між відсотковими показниками перевантаження колінних суглобів та надмірною вагою тіла жінок з неспецифічним болем у колінних суглобах (гоналгіями) на основі параметричного аналізу формул, що описують відповідні відсоткові показники. *Мета.* Визначення безпосередніх прямої й зворотної функціональних залежностей між відсотковим показником перенавантаження колінних суглобів (λ) та відсотковим показником надмірної ваги (α) без використання значень ваги жирової тканини (Q) та кістково-м'язової маси тіла (P) з метою спрощення розрахунків та подальшого аналізу динаміки загострення гоналгій, а також для оцінювання ефективності обраного підходу для вдосконалення програм фізичної терапії. *Методи.* Параметричний та математичний аналіз; біоімпедансний аналіз складу тіла. *Результати.* В процесі виконання дослідження залежності між показниками λ та α було з'ясовано, що обидва параметри є функціями від ваги жирової тканини Q та кістково-м'язової маси тіла P . Це дало підставу розглядати показники λ та α як параметрично задані функції, що мають спільні параметри варіювання (тобто Q та P). Оскільки в обох функціях однакова кількість параметрів варіювання, було виконано вилучення відповідних параметрів із подальшим зв'язуванням показників λ та α у єдину пряму функціональну залежність $\lambda = f(\alpha)$ та навпаки $\alpha = f(\lambda)$. Такі функціональні залежності дозволяють без зайвих експериментальних даних та значної кількості вимірювань проаналізувати міру перенавантаження колінних суглобів у жінок із надмірною вагою, враховуючи лише відсоток жирової тканини у їхньому тілі (незалежно від загальної маси тіла). Початково одержана функція вказувала на те, що характер розвитку перенавантаження колінних суглобів жінок зі збільшенням надмірної ваги є типовим, й не давав можливості простежувати, яким саме чином вік та стан організму обстежуваних осіб впливає на перебіг розвитку гоналгій. Відтак функції $\lambda = f(\alpha)$ та $\alpha = f(\lambda)$ було модифіковано таким чином, щоб вони враховували вікові особливості та менструальний цикл жінок, зважаючи на те, що нормальний відсотковий вміст жирових тканин у тілі α_0 може варіювати в певних загальноприйнятих межах. Одержані функціональні залежності між відсотковим вмістом жирових тканин у тілі α та мірою перенавантаження колінних суглобів λ у жінок з надмірною вагою демонструють невітшну динаміку зростання небезпеки загострення гоналгій зі збільшенням вмісту жирових тканин у тілі, особливо з віком. Ці залежності з математичної точки зору обґрунтовують важливість оперативного реагування на збільшення ваги тіла у жінок старшого віку й можуть використовуватися під час підбору або регулювання інтенсивності фізичних навантажень і розробки програм із фізичної терапії, спрямованої на зміцнення м'язів та покращення функціонального складу тіла.

Ключові слова: параметричний аналіз, математичний аналіз, зв'язування параметрів функції, біоімпедансний метод, надмірна вага, колінний суглоб, інтерпретаційна фізико-математична модель, опорно-руховий апарат, гоналгія, фізична терапія.

Determination of the functional relationship between overweight and knee joint overload in women with non-specific knee pain

I. O. Zharova¹, V. I. Skochko², O. V. Kutcheriava¹

¹National University of Physical Education and Sports of Ukraine, Kyiv, Ukraine

²Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine

Abstract. The article addresses the identification of functional relationship between the percentage measures of knee joint overload and overweight in women with non-specific knee pain based on the parametric analysis of formulas describing the corresponding percentage measures. *Objective.* To determine the direct and inverse functional relationships between the percentage measure of knee joint overload (λ) and the percentage measure of overweight (α) without using the values of body fat mass (Q) and lean mass (P) in order to simplify calculations and further analysis of the dynamics of non-specific knee pain exacerbation, as well as to evaluate the effectiveness of the chosen approach to improve physical therapy programs. *Methods.* Parametric and mathematical analysis; bioimpedance analysis of body composition. *Results.* In the course of studying the relationship between λ and α , it was found that both parameters are functions of the body fat mass (Q) and lean mass (P). This gave grounds to consider the indicators λ and α as parametrically defined functions that have common variation parameters (i.e. Q and P). Since both functions have the same number of variation parameters, we extracted the relevant parameters and then linked λ and α indicators into a single direct functional relationship $\lambda = f(\alpha)$ and vice versa: $\alpha = f(\lambda)$. Such functional relationships allow us to analyze the degree of knee joint overload in overweight women without unnecessary experimental data and a significant number of measurements, taking into account only the body fat percentage (regardless of body weight). Initially, the function obtained indicated that the nature of knee joint overload in overweight women was typical and did not allow us to trace how the age and physical condition of the subjects affected the course of non-specific knee pain development. Therefore, the functions $\lambda = f(\alpha)$ and $\alpha = f(\lambda)$ were modified to take into account the age characteristics and menstrual cycle of women, given that the normal body fat percentage α_0 can vary within certain generally accepted limits. The obtained functional relationships between the body fat percentage α and the degree of overload of the knee joints λ in overweight women demonstrate a disappointing trend of increasing the risk of exacerbation of non-specific knee pain with an increase in body fat percentage, especially with age. From a mathematical point of view, these relationships substantiate the importance of prompt response to weight gain in older women and can be used in the choice or control of physical activity intensity and the development of physical therapy programs aimed at increasing muscle strength and improving functional body composition.

Keywords: parametric analysis, mathematical analysis, linking of function parameters, bioimpedance analysis, overweight, knee joint, interpretive physical and mathematical model, musculoskeletal system, non-specific knee pain, physical therapy.

Постановка проблеми. Основною причиною розвитку болю у колінах (гоналгій) є невідповідність між механічним навантаженням на суглобову поверхню хряща та її здатністю чинити опір цьому навантаженню. Це призводить до перенавантаження поверхні хряща та викликає явища його дегенерації й деструкції [12].

У більшості випадків причиною перенавантаження колінних суглобів у жінок є надмірна вага, обумовлена підвищеним вмістом жирової тканини у тілі. Основними інструментами у подоланні надмірної ваги в такому випадку є правильно підібрана дієта та фізичні навантаження, адже останні у складі індивідуальної програми фізичної терапії ведуть до зниження вмісту жирової тканини та збільшення відсоткового вмісту м'язової частки маси тіла.

У світлі сказаного стає очевидним, що боротьба із надмірною вагою повинна розпочина-

тися на ранніх стадіях її виникнення, оскільки зниження вмісту жирової тканини у тілі призводить до зменшення навантаження на хрящі колінних суглобів, а відтак, з високою ймовірністю, перешкоджає розвитку майбутніх або уже наявних запальних процесів. Однак, саме своєчасність вживання заходів з фізичної терапії відіграє вирішальну роль, оскільки за уже наявного болю виникають додаткові ускладнення у здійсненні фізичних вправ. А це, в свою чергу, звужує палітру інструментальних засобів фізичної терапії. Внаслідок обмеження можливості виконання фізичних вправ і зниження рівня фізичної активності (гіподинамії) може відбутися набір додаткової ваги, яка ще більше ускладнить процес фізичної терапії. Таким чином, виникає причинно-наслідковий рекурсивний зв'язок, який призводить до погіршення функціонального стану колінних суглобів, набору надмірної ваги та

обмежень у інструментальних засобах програми фізичної терапії.

Важливо мати дієвий та простий набір інструментів для превентивного запобігання хронічному перенавантаженню колінних суглобів, адже зупинити уже набуті запальні прогресуючі деструктивні процеси у світлі сказаного може бути дуже складно або навіть неможливо. Для більш детального дослідження цього питання потрібно аналізувати динаміку розвитку гоналгій у часі, беручи до уваги індивідуальні параметри стану жіночого організму. Проте у даній роботі ми обмежимося лише дослідженнями загальних закономірностей між вмістом жирових тканин і показником перенавантаження колінних суглобів.

Мета дослідження. У роботі [4] було продемонстровано підхід до визначення відсоткового показника перенавантаження колінних суглобів (λ) як відношення значення ваги жирової тканини (Q) до кістково-м'язової маси тіла (P) обстеженої людини. Відсотковий показник надмірної ваги (α) пропонували обчислювати як відношення значення ваги жирової тканини (Q) до усїєї маси тіла (Q + P). Однак, на сьогодні не знайдено прямої залежності між показниками λ та α . Відтак доцільно визначити безпосередню пряму й зворотну функціональну залежності між цими двома показниками без використання значень Q та P з метою спрощення розрахунків та подальшого аналізу динаміки загострення гоналгій, а також для оцінювання ефективності обраного підходу до вдосконалення програми фізичної терапії [5, 9]. Метою даної роботи є модифікація знайденої залежності для уможливлення врахування нормального вмісту жирової тканини у тілі жінок (α_0) як такого, що не призводить до перенавантаження колінних суглобів доки відповідний відсоток не перевищено. Зрештою, коли буде здійснено інтерпретаційне фізико-математичне моделювання роботи нижньої частини опорно-рухового апарату жінок (згідно з концепцією, запропонованою вченими [3]), та знайдено зусилля, які виникають при перевантаженні колінних суглобів як наслідок вмісту надлишкової жирової тканини у тілі, результати досліджень залежності між надмірною вагою та показником перенавантаження колінних суглобів дадуть змогу зрозуміти, як корелюють між собою відсоток перевантаження та фактичні надмірні зусилля. Це дозволить уникнути надмірної кількості складних розрахунків та зменшити обсяги моделювання, спираючись на результати прогнозування шляхом інтерполяції, екстраполяції або апроксимації попередньо отриманих даних.

Методи й організація дослідження. Визначення функцій залежності між відсотковими показниками перенавантаження колінних суглобів λ та надмірної ваги тіла α здійснювали шляхом застосування інструментів параметричного аналізу [6, 8] функцій відповідних параметрів, які залежать від Q та P. Модифікацію прямої та зворотної функцій залежності λ від α та α від λ виконували із використанням підходів та засобів математичного аналізу [1]. Окрім того, модифікація цих двох залежностей для можливості врахування нормального вмісту жирової тканини у тілі жінок (α_0) має виконуватися на основі даних, отриманих із застосуванням біоімпульсного аналізу [2, 11, 12], який дає змогу отримати інформацію про масу тіла, індекс маси тіла, а також відсоток та вміст його жирової та знежиреної маси.

Результати дослідження та їх обговорення. В роботі [4] було продемонстровано, що відсоткові показники перенавантаження колінних суглобів λ та надмірної ваги α є функціями від ваги жирової тканини Q та кістково-м'язової маси тіла P:

$$\lambda = (Q/P) \times 100 \%, \quad (1)$$

$$\alpha = (Q/[Q + P]) \times 100 \%. \quad (2)$$

У функціональних залежностях (1) та (2) показники Q та P є спільними параметрами варіювання. Окрім того, кількість параметрів варіювання у цих функціях однакова і дорівнює двом. Вилучимо з рівнянь (1) та (2) показники Q та P, а потім зв'яжемо між собою параметри λ та α , застосувавши елементи теорії параметризації [6]. Для цього виконаємо наступну послідовність операцій.

З рівняння (1) виділимо показник P:

$$P = (Q/\lambda) \times 100 \%,$$

та підставимо одержаний вираз до тотожності (2):

$$\alpha = \{Q/[Q + (Q/\lambda) \times 100 \%]\} \times 100 \%.$$

Скоротивши у даній формулі параметр Q у чисельнику та знаменнику, отримаємо залежність $\alpha = f(\lambda)$:

$$\alpha = \frac{100 \%}{1 + (1/\lambda) \times 100 \%}, \text{ або:}$$

$$\alpha = f(\lambda) = (\lambda \times 100 \%)/(\lambda + 100 \%). \quad (3)$$

Здійснивши ряд перетворень, можна отримати зворотну залежність — $\lambda = f(\alpha)$:

$$\lambda = f(\alpha) = (\alpha \times 100 \%)/(100 \% - \alpha). \quad (4)$$

Функціональні залежності (3) та (4) дозволяють без зайвих експериментальних даних та зна-

чної кількості вимірювань проаналізувати міру перенавантаження колінних суглобів λ у жінок із надмірною вагою, враховуючи лише відсоток жирової тканини α у їхньому тілі (незалежно від загальної маси тіла) і навпаки.

На жаль, дані функції не дають можливості простежити, яким саме чином вік та стан організму обстежуваних осіб впливає на перебіг розвитку гоналгій внаслідок перенавантаження колінних суглобів. Справа в тому, що залежно від вікових особливостей та менструального циклу в організмі обстежуваних жінок може міститися різний обсяг жирових тканин, відсотковий вміст яких α_0 вважається нормальним, а отже таким, що не призводить до перенавантаження колінних суглобів. Для того, щоб врахувати нормальний відсотковий вміст жирових тканин α_0 у складі тіла жінок, слід спершу проаналізувати специфіку функції (4). Для цього скористаємося інструментами математичного аналізу [1]. Зокрема перевіримо дану функцію на наявність асимптот. Справа в тому, що графік функції $\lambda = f(\alpha)$ при змінній прямоючій до деякого значення $\alpha \rightarrow \alpha_{\text{asym.}}$ (від англійської: «asymptotic value» – асимптотичне значення) матиме вертикальну асимптоту

$$\alpha = \alpha_{\text{asym.}}, \quad (5)$$

якщо

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_{\text{asym.}}} f(\alpha) = \pm \infty. \quad (6)$$

Графік функції $\lambda = f(\alpha)$ матиме горизонтальну асимптоту

$$\lambda = \lambda_{\text{asym.}}, \quad (7)$$

тільки в тому випадку, коли існує скінченна межа цієї функції, рівна $\lambda_{\text{asym.}}$, при змінній α , прямоючій до нескінченності $\alpha \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} f(\alpha) = \lambda_{\text{asym.}}. \quad (8)$$

Продемонструємо, що функція (4) має і вертикальну і горизонтальну асимптоти. Однією з особливостей (ознакою наявності асимптот), яку слід перевіряти, є знаменник дробових функцій. В нашому випадку маємо наступну умову на вертикальну асимптоту:

$$100\% - \alpha \neq 0. \quad (9)$$

З рівності (9) стає очевидним, що рівняння вертикальної асимптоти:

$$\alpha = \alpha_{\text{asym.}} = 100\%,$$

що цілком логічно, виходячи з факту неможливості досягнення організмом 100-відсоткового вмісту жирових тканин.

Горизонтальну асимптоту знайдемо за формулою (8):

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} f(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha \times 100\%}{100\% - \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha \times 100\% / \alpha}{100\% / \alpha - \alpha / \alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \frac{100\%}{0 - 1} = -100\% = \lambda_{\text{asym.}}. \end{aligned} \quad (10)$$

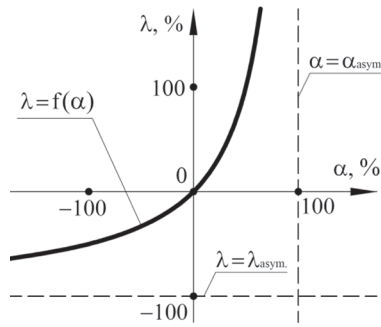
Це свідчить про те, що рівняння горизонтальної асимптоти матиме такий вигляд:

$$\lambda = \lambda_{\text{asym.}} = -100\%. \quad (11)$$

Асимптота (11) не матиме фізичного змісту для нашої задачі, оскільки значення відсотка перенавантаження колінних суглобів не може бути меншим за 0%. Крім того, очевидним є те, що функція (4) і, як наслідок, функція (3) є гіперболічними й мають дві перпендикулярні асимптоти. Це, окрім іншого, означає, що існуватиме по дві гілки цих гіпербол. Однак, фізичний зміст мають лише ті частини гілок гіпербол, які знаходяться у першому квадранті координатних площин $\alpha O\lambda$ та $\lambda O\alpha$ для функцій $\lambda = f(\alpha)$ та $\alpha = f(\lambda)$ відповідно.

Тепер, маючи функцію $\lambda = f(\alpha)$, можемо модифікувати її таким чином, щоб вона враховувала вікові особливості та менструальний цикл жінок, зважаючи на те, що у організмі обстежуваних жінок може міститися деякий нормальний відсоток жирових тканин α_0 . Піддамо функцію (4) відповідній модифікації. Для цього проаналізуємо положення асимптот на координатній площині $\alpha O\lambda$ (рис. 1). Графік функції $\lambda = f(\alpha)$ проходить через початок координат (що очевидно, оскільки при $\alpha = 0$ маємо $\lambda = 0$). Натомість вимагається здійснити таку модифікацію цієї функції, щоб її графік проходив через точку із координатами $\alpha = \alpha_0$ та $\lambda = 0$. Найпростіше цього можна досягти шляхом зміщення графіка даної функції вниз до перетину графіка з віссю $O\alpha$, або шляхом зміщення (поступального руху) уже існуючої точки перетину графіка цієї функції (тобто точки з координатами $\alpha = 0$ та $\lambda = 0$ разом із самим графіком) праворуч у напрямку зростання значень аргумента α (уздовж осі $O\alpha$). Наприклад, щоб графік деякої умовної функції $y = f(x)$ змістити вправо/вліво на величину Δx (уздовж осі Ox), необхідно до аргументів функції додати/відняти відповідне значення Δx : $y = f(x \pm \Delta x)$ (якщо $\Delta x < 0$ – графік зміститься вправо, а якщо $\Delta x > 0$ – графік зміститься вліво), а щоб змістити цей графік вгору/вниз на величину Δy (уздовж осі Oy) необхідно до ординат функції додати/відняти відповідне значення Δy : $y \pm \Delta y = f(x)$ (якщо $\Delta y < 0$ – графік зміститься вгору, а якщо $\Delta y > 0$ – графік зміститься вниз). На рисунку 2 наочно показано візуалізацію даного принципу.

Рисунок 1 –
Графік
функції (4) із
асимптотами



Очевидно, що рух графіка функції $\lambda = f(\alpha)$ праворуч недопустимий, оскільки асимптотичне значення $\alpha_{\text{asym.}} = 100\%$ не може бути збільшеним через неможливість досягнення й тим більше перевищення 100-відсоткового значення вмісту жирових тканин у організмі. Натомість зміщення графіка даної функції вниз не призведе до порушення умови недосяжності $\alpha_{\text{asym.}} = 100\%$. А зміщення горизонтальної асимптоти $\lambda = -100\%$ разом із графіком функції $\lambda = f(\alpha)$ не суперечитиме жодним фізичним аксіоматичним даним про людський організм. Рівняння нової горизонтальної асимптоти набуде такого вигляду:

$$\lambda = \lambda_{\text{asym.}} - \lambda_0 = -(100\% + \lambda_0). \quad (12)$$

Для того щоб виконати відповідний рух графіка функції вниз, потрібно розуміти, на яку величину зміщення λ_0 вниз по вертикалі (уздовж координатної осі $O\lambda$) має переміститися відповідний графік. Якщо відповідне значення λ_0 відоме, функція зміщеного вниз по вертикалі графіка матиме вигляд:

$$\lambda + \lambda_0 = f(\alpha),$$

звідки отримаємо:

$$\lambda = f(\alpha) - \lambda_0 = (\alpha \times 100\%) / (100\% - \alpha) - \lambda_0. \quad (13)$$

Очевидно, що якщо метою зміщення графіка вниз є його перетин із горизонтальною віссю координат $O\alpha$, то у точці зі значенням абсцис α_0 функція λ матиме нульовий показник. Таким чином, має виконуватися умова:

$$\lambda = (\alpha_0 \times 100\%) / (100\% - \alpha_0) - \lambda_0 = 0, \quad (14)$$

звідки отримаємо:

$$\lambda_0 = (\alpha_0 \times 100\%) / (100\% - \alpha_0). \quad (15)$$

Підставляючи цю величину до функції (13), отримаємо:

$$\lambda = \frac{\alpha \times 100\%}{100\% - \alpha} - \frac{\alpha_0 \times 100\%}{100\% - \alpha_0}.$$

Після приведення правої частини цієї рівності до спільного знаменника та спрощення відповідного виразу, матимемо таку функцію:

$$\lambda = \frac{(\alpha - \alpha_0)}{(100\% - \alpha) \cdot (100\% - \alpha_0)} \times 10^4 \%. \quad (16)$$

Однак, зважаючи на суто математичну природу одержання функції (16), вона є лише гіпотезою на даному етапі та потребує доведення.

Для доведення гіпотези (16) повернемося до початку й проаналізуємо, як зміниться формула (1) для визначення показника перенавантаження колінних суглобів λ , якщо від ваги жирової тканини Q відняти деяку нормальну вагу жирової тканини q , наявність якої не спричинятиме перенавантаження, доки її обсяг не буде перевищено. Формула (1) набуде такого вигляду:

$$\lambda = [(Q - q)/P] \times 100 \%. \quad (17)$$

При цьому формула (2) для визначення відсоткового показника надмірної ваги α у тілі залишиться незмінною.

Наявність величини нормальної ваги жирової тканини q дасть змогу по аналогії до формули (2) обчислити значення нормального відсотка жирових тканин α_0 у тілі за формулою:

$$\alpha_0 = (q/[q + P]) \times 100 \%. \quad (18)$$

Виражаючи з формули (18) величину q через показник α_0 та значення кістково-м'язової маси тіла P , одержимо:

$$q = \alpha_0 \cdot P / (100\% - \alpha_0). \quad (19)$$

З формули (17) виразимо значення P :

$$P = [(Q - q)/\lambda] \times 100 \%, \quad (20)$$

та підставимо до (2). Одержимо:

$$\alpha = \frac{Q}{Q + [(Q - q)/\lambda] \times 100\%} \times 100 \%.$$

Останній вираз після спрощення набуде такого вигляду:

$$\alpha = \frac{\lambda \cdot Q}{\lambda \cdot Q + (Q - q) \times 100\%} \times 100 \%. \quad (21)$$

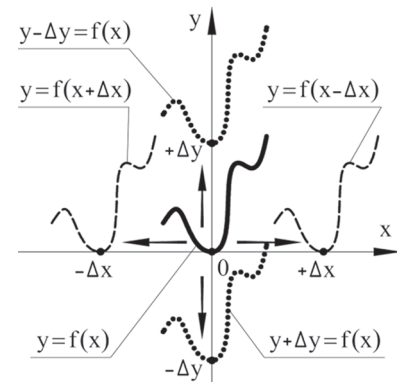


Рисунок 2 –
Ілюстрація принципів зміщення графіків при модифікації їхніх функцій

Підставимо значення Р з формули (20) до тотожності (19):

$$q = \frac{\alpha_0 \cdot (Q - q)}{\lambda \cdot (100 \% - \alpha_0)} \times 100 \%$$

Виразивши з цього виразу значення q та здійснивши ряд спрощень, отримаємо формулу:

$$q = \frac{\alpha_0 \cdot Q}{\lambda \cdot (100 \% - \alpha_0) + \alpha_0 \times 100 \%} \times 100 \% \quad (22)$$

Підставивши значення q з формули (22) до (21), одержимо вираз:

$$\alpha = \frac{\lambda \cdot Q}{\lambda \cdot Q + \left[Q - \frac{\alpha_0 \cdot Q}{\lambda \cdot (100 \% - \alpha_0) + \alpha_0 \times 100 \%} \right]} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\lambda \cdot Q}{\lambda \cdot Q + \left[Q - \frac{\alpha_0 \cdot Q}{\lambda \cdot (100 \% - \alpha_0) + \alpha_0 \times 100 \%} \right]} \times 100 \%,$$

який після скорочення параметра Q матиме такий вигляд:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \left[1 - \frac{\alpha_0}{\lambda \cdot (100 \% - \alpha_0) + \alpha_0 \times 100 \%} \right]} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + \left[1 - \frac{\alpha_0}{\lambda \cdot (100 \% - \alpha_0) + \alpha_0 \times 100 \%} \right]} \times 100 \%,$$

або, після ряду додаткових спрощень:

$$\alpha = \frac{\lambda \cdot (100 \% - \alpha_0) + \alpha_0 \times 100 \%}{\lambda \cdot (100 \% - \alpha_0) + 10^4 \%} \times 100 \% \quad (23)$$

Якщо виключити з цієї тотожності параметр α_0 , то у спрощеній формі, беручи до уваги формулу (3), вона може бути записана так:

$$\alpha = f(\lambda + \lambda_0) = \frac{(\lambda + \lambda_0) \times 100 \%}{(\lambda + \lambda_0) + 100 \%},$$

де значення λ_0 визначається за формулою (15). Найбільше практичний інтерес являє запис даного рівняння саме у формі (23), оскільки він не вимагає додаткового визначення параметра λ_0 .

Виражаючи з тотожності (23) відсотковий показник перенавантаження колінних суглобів λ , одержимо такий вираз:

$$\lambda = f(\alpha) - \lambda_0 = \frac{(\alpha - \alpha_0)}{(100 \% - \alpha) \cdot (100 \% - \alpha_0)} \times 10^4 \% \quad (24)$$

Вираз (24) повністю тотожний виразу (16), що підтверджує прийняту гіпотезу. Отже, формула (24) демонструє об'єктивну математичну залежність відсоткового показника перенавантаження колінних суглобів λ від відсоткового показника надмірної ваги α (тобто $\lambda = f(\alpha)$) та передбачає

можливість наявності деякого нормального відсотка жирових тканин α_0 у організмі жінок, який, може варіювати, враховуючи їхні вікові особливості та менструальні цикли. Натомість вираз (23) встановлює зворотну залежність параметра α від λ (тобто $\alpha = f(\lambda)$), уможливаючи також і врахування наявності нормального відсотка жирових тканин α_0 . Схематично графіки функцій (23) та (24) представлено на рисунку 3. Окрім іншого, на цих рисунках проілюстровано принципи модифікації, обумовлені вищенаведеними міркуваннями щодо зміщення початкових графіків відповідних функцій.

Однак, і ця формула, хоч і точніша, ніж початкова (4), також має недолік практичного характеру, оскільки є незастосовною по відношенню до жінок, організм яких містить нижчий відсоток жирових тканин α , ніж нормальне значення цього показника α_0 , тобто вміст жирових тканин їхнього тіла α є меншим за α_0 :

$$\alpha < \alpha_0,$$

адже в такому випадку відсотковий показник перенавантаження колінних суглобів λ набуватиме від'ємного значення, що не має фізичного сенсу.

Для того, щоб залежність λ від α була об'єктивною на інтервалі значень аргумента (α) від 0% до 100%, необхідно модифікувати тотожність (24) таким чином, аби функціональна залежність $\lambda = f(\alpha)$ мала таку форму:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{(\alpha - \alpha_0)}{(100 \% - \alpha) \cdot (100 \% - \alpha_0)} \times 10^4 \% \Rightarrow \alpha_0 \leq \alpha < 100 \% \\ 0 \Rightarrow 0 \% \leq \alpha < \alpha_0 \end{cases} \quad (25)$$

але за умови, що відповідна функціональна залежність буде неперервно визначуваною на усьому інтервалі визначення функції λ та її аргументів α . У формулі (25) й надалі ми позначатимемо символом « \Rightarrow » логічний оператор «якщо».

Для вирішення даної задачі звернемося до так званих функцій активації, що використовують при створенні та програмуванні штучних нейронних мереж [10] й зокрема під час моделювання роботи штучних перцептронів [13]. У штучних нейромережах функції активації, що представлені у подальших формулах як $\varphi(\alpha)$, визначають вихідний сигнал нейрона залежно від індукованого локального поля α , значення якого ми в даній роботі прийматимемо еквівалентним значенню аргумента α (тобто відсоткового вмісту жирових тканин тіла) функції $\lambda = f(\alpha)$. У класичній теорії штучних нейронних мереж існують три основні типи функцій активації $\varphi(\alpha)$:

1) функція одиничного стрибка (threshold function), або порогова функція, що у технічній

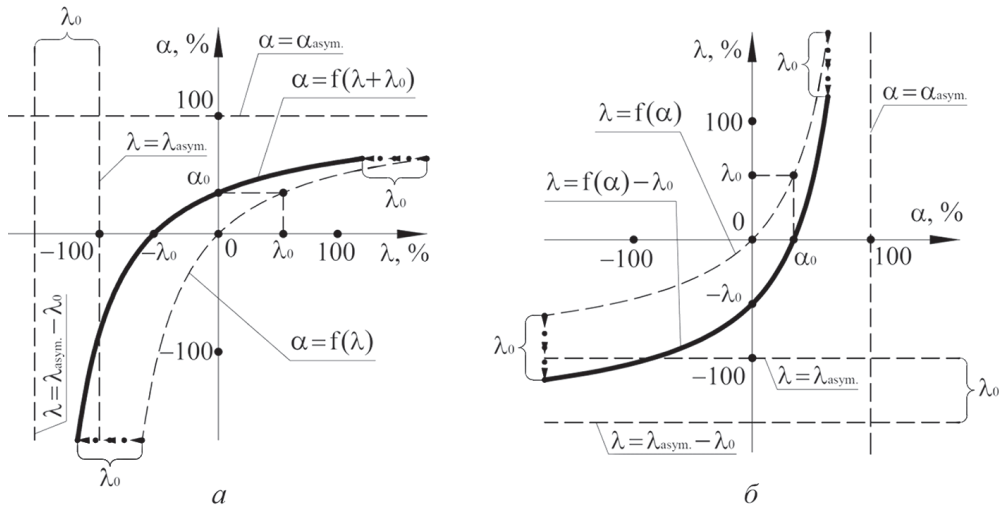


Рисунок 3 – Графік функцій із асимптотами: а – (23); б – (24)

літературі більш відома, як функція Хевісайда (рис. 4, а):

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \alpha \geq 0\%, \\ 0 & \Rightarrow \alpha < 0\%; \end{cases} \quad (26)$$

2) кусково-лінійна функція (piecewise-linear function) має таку форму запису (рис. 4, б):

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \alpha \geq +1/2\%, \\ |\alpha| & \Rightarrow -1/2\% < \alpha < +1/2\%, \\ 0 & \Rightarrow \alpha \leq -1/2\%; \end{cases} \quad (27)$$

3) сигмоїдальна, S-подібна функція (sigmoid function), що є найпоширенішою та швидко зростаючою функцією, яка підтримує баланс між лінійним і нелінійним характером. Дуже практичним прикладом сигмоїдальної функції може слугувати логістична функція (logistic function), що має такий вигляд (рис. 4, в):

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha \cdot \eta)} = \frac{1}{1 + e^{-\eta \alpha}}, \quad (28)$$

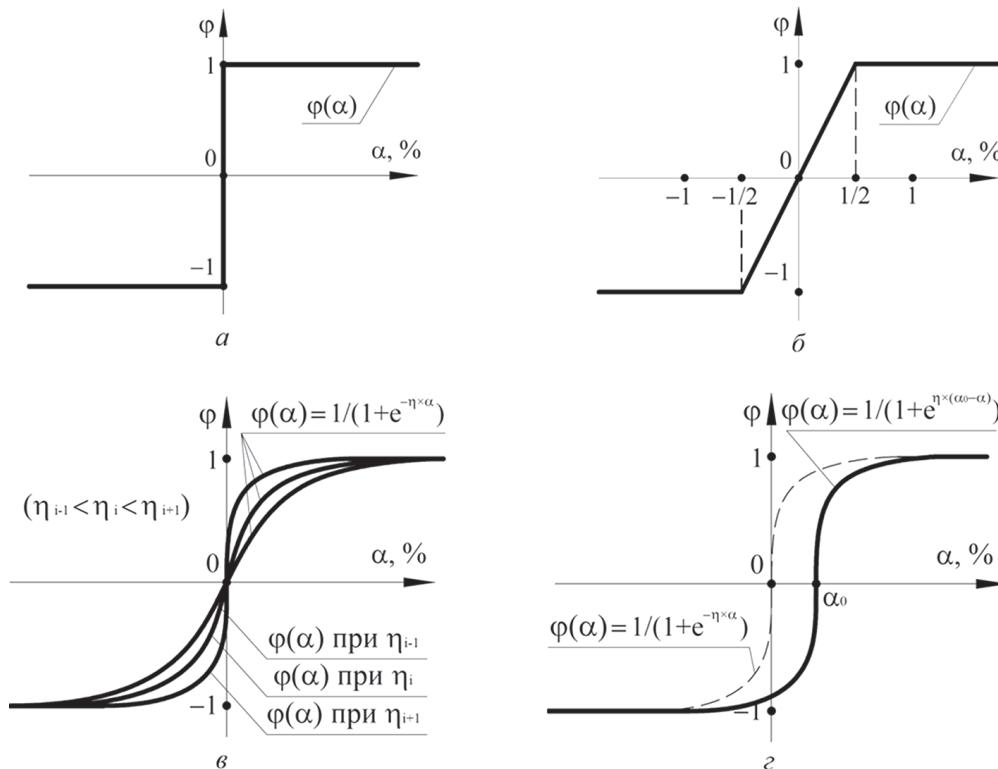


Рисунок 4 – Графік функцій активації: а – (26); б – (27); в – (28); г – (29)

де $e \approx 2.7182$ – основа натурального логарифма; η – невід’ємний коефіцієнт (зазвичай $\eta \gg 1$), зі зростанням якого характер переходу графіка функції через вісь ординат (у нас, це вісь $O\lambda$) стає більш різким, наближаючись за виглядом до графіка функції (26).

Одна із цих функцій може бути використана для модифікації тотожності (24) шляхом перемноження їх правих частин. Це дозволить вирівняти значення функції до порогового значення аргументів (які для форм запису (26), (27) та (28) становлять $\alpha = 0$), перетворивши їх на нульові (тобто: $\lambda = 0$), та водночас залишити незмінними значення функції (24) після відповідного порогового значення аргументу. Проаналізуємо релевантність застосування кожної з цих функцій активації по відношенню до тотожності (24) з метою її модифікації.

Функція (26) є найбільш застосовною для модифікації, оскільки має найбільш різкий характер перепаду значень функції у ділянці порогового значення аргументу α . Однак їх застосування можливе лише на основі алгоритмічного програмування в середовищі прикладних пакетів чисельної або символічної математики, тоді як відповідні інструменти можуть виявитися занадто складними або інколи навіть недоступними для фахівців галузі фізичної терапії.

Функція (27) є найменш застосовним інструментом для вирішення даної задачі, оскільки, окрім аналогічного до попередньої функції недоліку, має також дві зайві точки перелому при значеннях аргументу α рівних $-1/2$ та $+1/2$.

Натомість функція (28) є неперервною та не вимагає застосування жодних додаткових програм або інструментів для її застосування, а тому є найбільш привабливою та логічною для модифікації тотожності (24). Однак і сама функція (28) вимагає доповнення (як це, наприклад, було зроблено у [7]) перш ніж її можна буде використовувати для означеної мети, оскільки її порогове значення аргументу має збігатися зі значенням нормального відсоткового вмісту жирових тканин α_0 у тілі обстежуваних жінок. З графічної точки зору таке доповнення повинне спричинити зміщення графіка функції (28) вправо у напрямку зростання координатної осі $O\alpha$ на величину α_0 (рис. 4, г). Функція (28) матиме таку форму:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \frac{1}{1 + \exp[-\eta \cdot (\alpha - \alpha_0)]} = \frac{1}{1 + \exp[\eta \cdot (\alpha_0 - \alpha)]} = \\ &= \frac{1}{1 + e^{\eta(\alpha_0 - \alpha)}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Множення правої частини тотожності (24) на функцію активації (29) дозволить отримати шукану модифіковану функцію для визначення точної залежності відсоткового показника перенавантаження колінних суглобів λ від відсоткового показника надмірної ваги α (тобто $\lambda = f(\alpha)$):

$$\begin{aligned} \lambda &= [f(\alpha) - \lambda_0] \cdot \phi(\alpha) = \left\{ \frac{(\alpha - \alpha_0) \times 10^4 \%}{(100 \% - \alpha) \cdot (100 \% - \alpha_0)} \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{1 + e^{\eta(\alpha_0 - \alpha)}} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Умовну візуалізацію графіка функції (30) представлено на рисунку 5.

Цікавим є той факт, що тотожність (23), яка встановлює зворотну залежність між показниками λ та α (тобто $\alpha = f(\lambda)$) не вимагає жодних модифікацій, оскільки в межах фізично раціональних значень аргументу λ , значення функції α є цілком логічними та передбачуваними.

Це наштовхує на думку, що потрібно чітко визначити зони дії закономірностей, що визначаються функціями (30) та (23). Нагадаємо, що обидві функції є гіперболами, які мають по дві взаємно перпендикулярні асимптоти. Це, окрім іншого, означає, що існують по дві гілки цих гіпербол. Однак, фізичний зміст мають лише ті частини гілок гіпербол, які знаходяться у першому квадранті координатних площин $\alpha O\lambda$ та $\lambda O\alpha$ відповідно. Враховуючи усе зазначене, запишемо обмеження на використання результатів розрахунків на основі функцій (30) та (23) відповідно (тобто для $\lambda = f(\alpha)$ та $\alpha = f(\lambda)$):

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < \alpha_{\text{asym.}}, \text{ (де } \alpha_{\text{asym.}} = 100\%) \\ \lambda > 0. \end{cases} \quad (31)$$

Умови (31) засвідчують, що неможливими є ані від’ємні значення показника α й значень функції $\lambda = f(\alpha)$, а ні досягнення 100%-го вмісту жирових тканин в організмі. На рисунку 5, а та 5, б заштриховані усі зони, у яких значення функцій (30) та (23) не мають жодного сенсу, або не можуть існувати; водночас, незаштрихована зона виділяє на площині $\lambda O\alpha$ межі застосування відповідних функцій.

На рисунку 6 наведено графіки остаточно модифікованої функції залежності $\lambda = [f(\alpha) - \lambda_0] \times \phi(\alpha)$ (30) для жінок, фактичний та очікуваний (рекомендований) вміст жирових тканин яких був проаналізований із застосуванням біоімпадансного аналізу складу тіла у роботі [4]. Відповідні відсоткові показники масового та відсоткового вмісту жирових тканин у досліджуваних жінок наведено у таблиці 1. Окрім того,

Рисунок 5 – Графік функції із виділеними зонами застосування відповідно до (31): a – (23); b – (30)

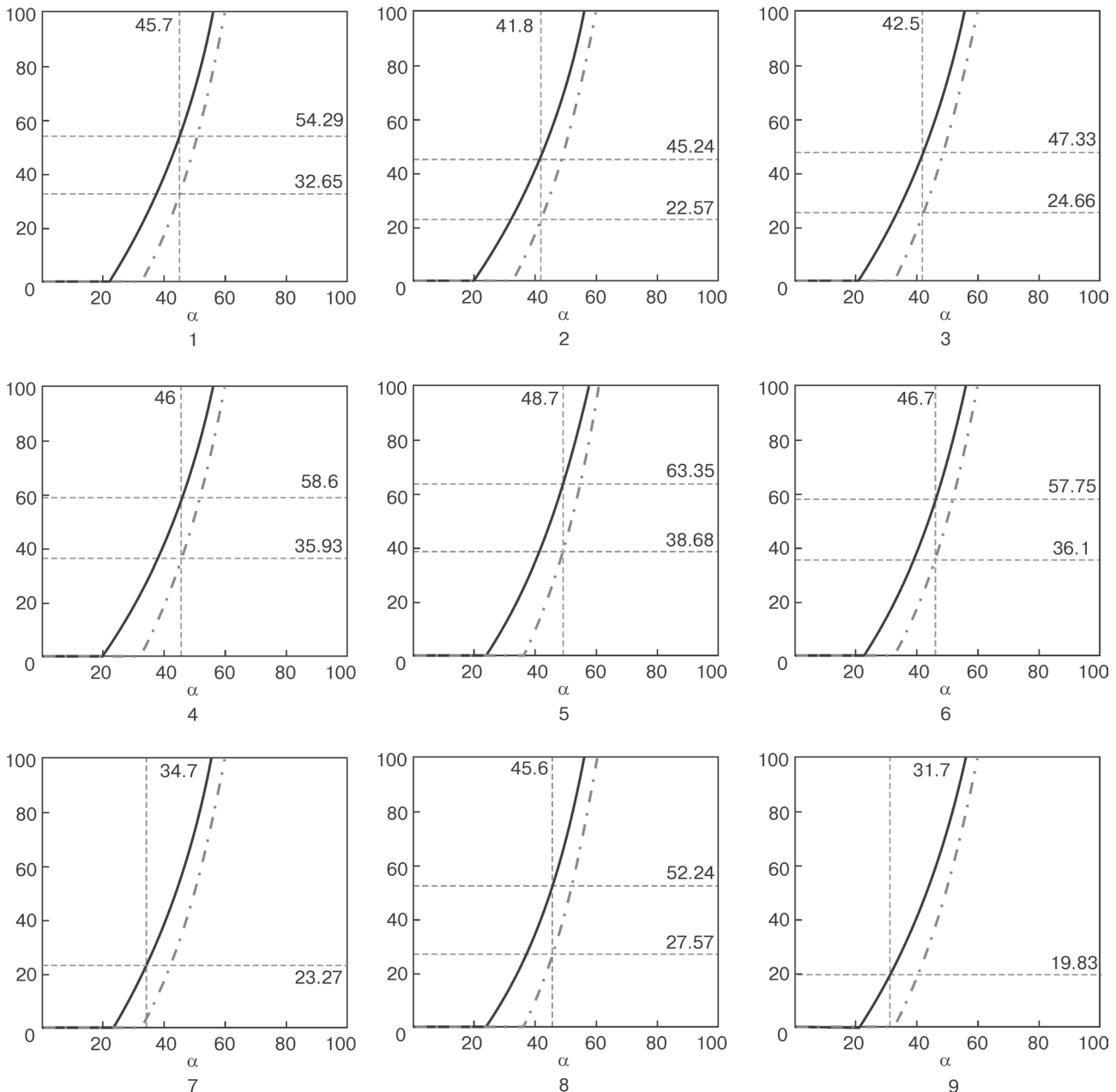
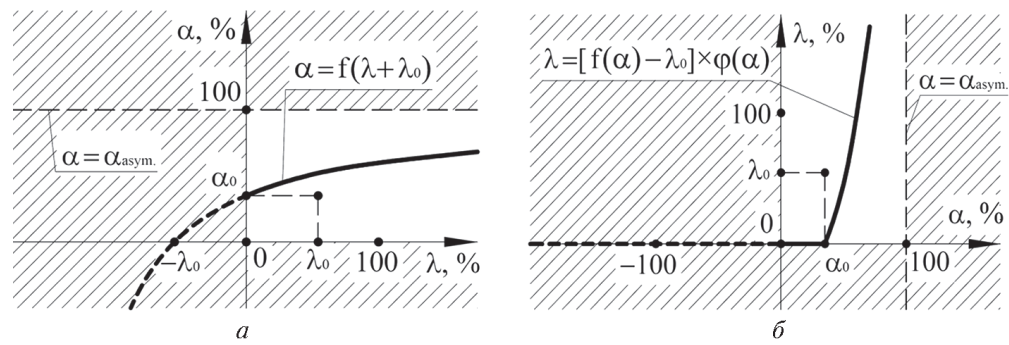


Рисунок 6 – Графіки функції (30), побудовані для даних рядків таблиці 1: — $\lambda_{b_upper}(\alpha)$, - - - $\lambda_{b_lower}(\alpha)$

на рисунку 6 та у таблиці 1 (у аналогічному порядку) неведено розрахункові прогнозовані діапазони показників перенавантаження колінних суглобів λ для жінок при визначених фактичних показниках відсоткового вмісту жирових тканин α . Нижні межі показників перенавантаження позначені на рисунку 6 індексами «lower», а верхні – «upper». При цьому значення коефіцієнта η у формулах (30) було встановлене рівним 10.

Результати розрахунків на основні встановленої функціональної залежності між відсотковим показником перенавантаження колінних суглобів λ та відсотковим показником надмірної ваги α , представлених у таблиці 1 та на рисунку 6, вказують на те, що для жінок різного віку характер цієї залежності значною мірою відрізняється. Очевидним є те, що для жінок старшого віку графіки відповідних залежностей (функцій λ від α) мають більш різкий характер зростання, ніж для жінок молодшого віку. Це великою мірою пов'язано із тим, що для молодших жінок рекомендовані норми відсоткового вмісту жирової тканини в організмі є нижчими, ніж для старших жінок.

Відтак, розвиток гоналгій у жінок старшого віку відбувається стрімкіше. Це свідчить про те, що програму фізичної терапії для старших жінок слід формувати набагато обережніше, зважаючи на необхідність уникнення додаткового перенавантаження колінних суглобів під час виконання вправ та навіть здійснення буденних рухів.

Дані результати дуже важливі, оскільки при подальших дослідженнях вкрай цікавим може

стати виконання порівняння визначених показників перенавантаження колінних суглобів із мірою фактичного перенавантаження, яке буде отримане при моделюванні внутрішніх зусиль у колінному суглобі для жінок із вибірки, наведеної у таблиці 1. Відповідне моделювання здійснюватиметься на основі побудови інтерпретаційної фізико-математичної моделі нижньої частини опорно-рухового апарату жіночого тіла. І коли фактичні зусилля будуть визначені (шляхом складання внутрішніх сил у стрижнях моделі, що сходяться у вузлах, які інтерпретують коліна), можливим стане й визначення напружень на поверхні хрящової тканини колінних суглобів (оскільки їх площу можна буде визначити на основі антропометричних даних жінок). Оскільки значення допустимих напружень, які без порушення нормального функціонування суглобів можуть діяти на поверхню хрящів, є відомими, то напруження, отримані в результаті розрахунків, можна буде порівняти саме із цими відомими значеннями, визначивши їх відсоткове співвідношення і, як наслідок, міру дійсного перенавантаження. Усе це дасть змогу більш об'єктивно та індивідуально підходити до вибору вправ у рамках програми фізичної терапії.

Висновки. Побудовані із застосуванням елементів теорії параметризації й математичного аналізу функціональні залежності між відсотковим вмістом жирових тканин у тілі α та мірою перенавантаження колінних суглобів λ в жінок з надмірною вагою демонструють інтенсифікацію динаміки зростання небезпеки загострення гоналгій зі збільшенням вмісту жирових тканин

ТАБЛИЦЯ 1 – Показники компонентного складу тіла обстежуваних жінок

№ з/п	Вік, років	Зріст, см	Повна маса тіла (Q + P), кг	Знежирена маса тіла (P), кг	Фактичні значення відсоткового вмісту жиру та його маси в організмі для особи згідно віку, ваги та менструального циклу		Рекомендовані норми відсоткового вмісту жирових тканин та їх маси в організмі для особи згідно віку, ваги та менструального циклу		Прогнозовані діапазони показників перенавантаження колінних суглобів (λ), %
					Вміст жирових тканин у організмі (α), %	Маса жирових тканин у організмі (Q), кг	Вміст жирових тканин у організмі (α_0), %	Маса жирових тканин у організмі (q), кг	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	54	165	89.5	48.6	45.7	40.9	23–34	14.5–25.1	32.65–54.29
2	30	165	78.8	45.9	41.8	32.9	21–33	12.2–22.6	22.57–45.24
3	34	162	104.6	60.2	42.5	44.4	21–33	16.0–29.6	24.66–47.33
4	38	160	86.8	46.9	46	40	21–33	12.5–23.1	35.93–58.6
5	69	164	99.2	50.9	48.7	48.3	24–36	16.1–28.6	38.68–63.35
6	55	164	89.4	47.6	46.7	41.8	23–34	14.2–24.5	36.1–57.75
7	44	155	61.8	38.7	34.7	23.1	23–34	11.6–19.9	1.62–23.27
8	65	170	117.1	63.7	45.6	53.5	24–36	20.1–35.8	27.57–52.24
9	30	155	70	47.8	31.7	22.2	21–33	12.7–23.5	0–19.83

у тілі жінок. Особливо гостро ця динаміка проявляється у жінок старшого віку, що пов'язано зі збільшенням допустимого нормального вмісту жирових тканин. У результаті, графіки залежності λ від α стають більш різкими та швидше зростають при подальшому наборі надмірної ваги.

Отримані залежності з математичної точки зору обґрунтовують важливість оперативного регування на збільшення ваги тіла у жінок старшого віку й можуть використовуватися під час добору або регулювання інтенсивності фізичних навантажень і розробки програми вправ із фізичної терапії, спрямованої на зміцнення м'язів та покращення функціонального складу тіла. Ці залежності свідчать про важливість обережності та виваженості під час виконання вправ жінками із надмірною вагою, оскільки додаткові динамічні впливи спричинять і небезпечні показники перенавантаження колінних суглобів та можуть призвести до погіршення їх стану. На все зазначене слід у подальшому звертати особливу увагу під час надання рекомендацій жінкам, які взяли участь у дослідженні, зосереджуючи увагу на уже наявному рівні перенавантаження колінних суглобів.

Окрім того, надзвичайно важливим є регулярний моніторинг за станом колінних суглобів жінок, які проходять курс фізичної терапії. Адже вкрай важливо розуміти, які зміни у тілі цих жінок відбуваються на кожному етапі проходження програми фізичної терапії. І якщо результати позитивні, й відсоток жирових тканин зменшується, то це не обов'язково може бути стимулом для збільшення навантажень, оскільки зниження вмісту жирової тканини ще не гарантує, що рі-

вень перевантаження колінних суглобів знизився достатньою мірою.

Очевидним є те, що аналіз компонентного складу організму на основі застосування біоімпедансного методу має здійснюватися систематично та вести до раціонального корегування програми фізичної терапії протягом усього періоду її дотримання.

Окрім того, отримані дані допоможуть краще зрозуміти результати моделювання внутрішніх зусиль, що виникатимуть у елементах інтерпретаційної фізико-математичної моделі нижньої частини опорно-рухового апарату, оскільки у майбутньому, якщо результати, отримані на основі застосування біоімпедансного методу, із достатньою точністю збігатимуться із результатами моделювання, можна буде скоротити час, що втрачається на моделювання, та відносно швидко отримувати достовірні дані про стан перенавантаження суглобів, безпосередньо застосовуючи формулу (30) і обмеження (31).

Перспективи подальших досліджень передбачають додаткове визначення функціональної залежності зміни відсоткового вмісту жирових тканин у організмі α від часу t . Наявність такої залежності дозволить на основі наявних спостережень за поточною динамікою зміни рівня надмірної ваги прогнозувати, як відбуватимуться аналогічні зміни у майбутньому. В подальшому це дасть змогу піти ще далі й у перспективі встановити пряму залежність міри перенавантаження колінних суглобів від часу: $\lambda = f(\alpha)$. Однак подібні дослідження вимагатимуть більшого обсягу часу на спостереження за фізичним станом жінок із обраної вибірки або навіть розширення цієї вибірки.

Література

1. Бронштейн ИН, Семедьяев КА. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов [Handbook of mathematics for engineers and university students]. Г Гроше, В Циглера, редактори. Москва: Наука; 1980. 976 с.
2. Гончарова Н, Ткачова А. Сучасний стан просторової організації тіла жінок першого періоду зрілого віку, які займаються оздоровчим фітнесом [The current state of spatial organization of the body of early adult age women engaged in health fitness]. МНВСНУ [інтернет]. 30, Грудень 2016 [цит. за 03, Серпень 2023];(24):46-50. Доступно на: <http://sportvisnyk.vnu.edu.ua/index.php/sportvisnyk/article/view/220>
3. Жарова ІО, Скочко ВІ, Кучерява ОВ. Моделювання функцій опорно-рухового апарату як інструмент вибору та використання засобів фізичної терапії в осіб із надлишковою масою тіла та гоналгіями [Modeling the functions of the musculoskeletal system as a tool for the selection and use of physical therapy in overweight patients affected by gonalgia]. Спортивна медицина, фізична терапія та ерготерапія. 2023; 1: 102–107. DOI: 10.32652/srmed.2023.1.102-107.
4. Жарова ІО, Скочко ВІ, Кучерява ОВ, Горенко ЗА. Особливості антропометричних характеристик жінок з надмірною вагою та гоналгіями [Features of anthropometric characteristics of overweight females

with gonalgias]. Спортивна медицина, фізична терапія та ерготерапія. 2023;2.

5. Кашуба В, Гончарова Н, Носова Н. Біомеханіка просторової організації тіла людини: теоретичні та практичні аспекти [Biomechanics of human body spatial organization: theoretical and practical aspects]. Теорія і методика фізичного виховання і спорту. 2020; 2: 67–84. DOI: 10.32652/tmfvs.2020.2.67-84.

6. Ковальов СМ, Ігумен МС, Пустюльга СИ, Михайленко ВЕ та ін. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи [Applied geometry and engineering graphics. Special sections]. Вип. 1. Луцьк : Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ; 2006. 256 с.

7. Коласова ГВ, Скочко ВІ, Кожедуб СА. Деякі аспекти визначення рівня освітленості криволінійних поверхонь від точкових джерел [Some aspects of determining the level of illumination of curved surfaces from point sources]. Енергоефективність в будівництві та архітектурі. 2019;13:7–13: DOI: <https://doi.org/10.32347/2310-0516.2019.13.7-13>

8. Михайленко ВЕ, Ковалев СІ, Седлецкая НІ, Анпилогова ВА. Інженерна геометрія з елементами теорії параметризації : Учебное пособие [Engineering geometry with elements of parametrization theory : study guide]. Київ: УМК ВО;1989.84 с.

9. Про Національну стратегію з оздоровчої рухової активності в Україні на період до 2025 року «Рухова активність – здоровий спосіб життя – здорова нація» [On the National strategy for physical activity in Ukraine for the period up to 2025 “Physical Activity – Healthy lifestyle – Healthy nation”]. Офіційний вебпортал парламенту України. Доступно на: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/42/2016>.

10. Haykin S. Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Upper Saddle River – New Jersey; 2006. P. 1105.

11. Kyle UG, Bosaeus I, De Lorenzo AD, Deurenberg P, Elia M, Manuel Gómez J, Lilienthal Heitmann B, Kent-Smith L, Melchior JC, Pirlich M,

Scharfetter H, M W J Schols A, Pichard C; ESPEN. Bioelectrical impedance analysis-part II: utilization in clinical practice. Clin Nutr. 2004 Dec;23(6):1430-53. DOI: 10.1016/j.clnu.2004.09.012. PMID: 15556267.

12. Nalyvayko NB, Bardin OI, Pavlova IO. An Analysis of the Body Composition Indicators of Young Females. Український журнал медицини, біології та спорту. 2020; 5(3): 465–470. DOI: 10.26693/jmbs05.03.465.

13. Rosenblatt F. Principles of Neurodynamics. Perceptrons and the Theory of Brain Mechanisms. Spartan Books, Washington, D. C.; 1962, 470 p.

Aniri2002@ukr.net
vladimirandfriends@gmail.com
olia.koutcheriava@gmail.com

Надійшла 11.01.2024